

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Σεπτέμβριος 2022

Θέμα 1

- (i) [0.5] Να διατυπωθεί μια πρόταση εύρεσης ενός βασικού συνόλου λύσεων της εξίσωσης:

$$x^2 y'' - (x^2 + x)y' + y = 0$$

γύρω από το σημείο $x_0 = 0$

- (ii) [2] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y' + \frac{xy}{x^2 + y^2 + y} = 0, \quad x, y > 0.$$

Θέμα 2

- (i) [1] Να δοθεί ο ορισμός του βασικού συνόλου λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης n -τάξης και να αποδειχθεί η ύπαρξή του.

- (ii) [2] Να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$y''' + y' = 1 + 2 \sin x.$$

Υπάρχει λύση y_0 ορισμένη στο \mathbb{R} τέτοια ώστε $y_0(0) = y_0'(0) = y_0''(0) = 0$;

Θέμα 3

- (i) [2.5] Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$x^2 y'' + 5xy' + 3y = b(x), \quad x \geq 1, \quad b \in C([1, +\infty))$$

- (ii) [0.5] Να εξετασθεί η ισχύ της πρότασης: Για $b(x) = x^{-2022}$, $x \geq 1$, όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι γραφμένες στο $[1, +\infty)$

Θέμα 4

- (i) [1] Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη λύσης η οποία ορίζεται στο $[0, +\infty)$ το π.α.τ

$$y' = y \log(1 + |x|) + e^{-x} \log(1 + y^2), \quad y(0) = a > 0$$

και να διατυπωθούν λεπτομερώς οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

- (ii) [2.5] Θεωρούμε το π.α.τ

$$2y'(x) = y(x)[k - my(x)], \quad y(0) = d > 0, \quad x \geq 0 \quad (k, m > 0).$$

(iia) Να λυθεί η εξίσωση

(iib) Χαρακτηρίστε ως Αληθείς ή Ψευδείς τις παρακάτω προτάσεις (με αιτιολόγηση).

(A) Υπάρχει ταλαντούμενη λύση

(B) Όλες οι λύσεις είναι θετικές

(C) Κάθε λύση συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό για $x \rightarrow +\infty$.

- Να δοθούν απαντήσεις σε ερωτήματα που να αθροίζουν το πολύ 10,5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ